

Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості

А. С. Сердюк¹, Т. А. Степанюк²

¹Інститут математики НАН України, Київ

²Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк

Анотація

Получено порядковые оценки для наилучших равномерных ортогональных тригонометрических приближений на классах 2π -периодических функций, таких, что их (ψ, β) -производные принадлежат единичным шарам пространств L_p , $1 \leq p < \infty$, в случае когда последовательность ψ такая, что произведение $\psi(n)n^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, может стремиться к нулю медленнее за любую степенную функцию и $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ при $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ или $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $p = 1$. Аналогичные оценки получены для приближений в L_s -метриках, $1 < s \leq \infty$, для классов (ψ, β) -дифференцируемых функций, таких, что $\|f_{\beta}^{\psi}\|_1 \leq 1$.

We obtain order estimates for the best uniform orthogonal trigonometric approximations of 2π -periodic functions, whose (ψ, β) -derivatives belong to unit balls of spaces L_p , $1 \leq p < \infty$, in case at consequences $\psi(k)$ are that product $\psi(n)n^{\frac{1}{p}}$ can tend to zero slower than any power function and $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ when $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ when $p = 1$. We also established the analogical estimates in L_s -metric, $1 < s \leq \infty$, for classes of the summable (ψ, β) -differentiable functions, such that $\|f_{\beta}^{\psi}\|_1 \leq 1$.

Позначимо через L_p , $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних в p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

а через L_{∞} — простір 2π -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Розглянемо множини 2π -періодичних дійснозначних функцій L_β^ψ , які означаються наступним чином.

Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функція із L_1 , ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (1)$$

Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \frac{\beta\pi}{2} \text{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ із L_1 , то цю функцію називають (див., наприклад, [1, с. 132]) (ψ, β) -похідною функції f і позначають через f_β^ψ . Множину функцій f , у яких існує (ψ, β) -похідна позначають через L_β^ψ .

Розглянемо одиничну кулю B_p в просторі дійснозначних функцій з L_p , тобто множину функцій $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і водночас $f_\beta^\psi \in B_p$, то будемо записувати, що функція $f \in L_{\beta,p}^\psi$.

Як показано в [1, с. 136], якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k \rightarrow \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty$, то елементи $f(x)$ множини $L_{\beta,p}^\psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ майже при всіх $x \in \mathbb{R}$ можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p, \quad \varphi \perp 1, \quad (2)$$

з сумовним ядром Ψ_β , ряд Фур'є якого має вигляд

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \psi(|k|) e^{-i(kt + \frac{\beta\pi}{2} \text{sign} k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right).$$

При цьому функція φ майже скрізь збігається з f_β^ψ .

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, які задають класи $L_{\beta,p}^\psi$, є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, заданих на $[1, \infty)$, що задовольняють умову $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій ψ позначатимемо через \mathfrak{M} .

Для класифікації функцій ψ із \mathfrak{M} за їх швидкістю спадання до нуля важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \quad (3)$$

З її допомогою з множини \mathfrak{M} виділяють наступні підмножини (див., наприклад, [1, с. 160–161]):

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} : \exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad 0 < K \leq \alpha(\psi; t)\}, \quad (4)$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \geq 1 \quad K_1 \leq \alpha(\psi; t) \leq K_2 < \infty\}. \quad (5)$$

В (4) і (5) величини K , K_1 , K_2 можуть залежати від ψ . Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$, γ_m — довільний набір із m цілих чисел і

$$S_{\gamma_m}(f; x) = \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f вигляду (1).

Величину

$$e_m^\perp(f)_s = \inf_{\gamma_m} \|f(x) - S_{\gamma_m}(f; x)\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad (6)$$

називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням функції $f \in L_s$ в метриці простору L_s , а величину

$$e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} e_m^\perp(f)_s, \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \quad (7)$$

— найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу $L_{\beta,p}^\psi$ в метриці простору L_s .

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок величин $e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $1 \leq p < \infty$ і $s = \infty$, а також при $p = 1$ і $1 < s \leq \infty$.

У випадку коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $L_{\beta,p}^\psi$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ є відомими класами Вейля-Надя $W_{\beta,p}^r$. Для цих класів порядкові оцінки величин (7) при $1 < p, s < \infty$, відомі (див. [2], [3]). Точні порядки величин $e_n^\perp(W_{\beta,p}^r)_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, встановлені також при $1 < p < \infty$, $s = \infty$ для усіх $r > \frac{1}{p}$, при $p = 1$, $1 < s < \infty$ для всіх $r > \frac{1}{s'}$, та при $s = \infty$, $p = 1$, $r > 1$ і $\beta = 0$ (див. [4], [3, с. 137, 140]).

У випадку, коли $\psi \in B \cap \Theta_q^*$, де B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \leq K$, $t \geq 1$, а Θ_q^* — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, для яких існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k)k^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$ не зростає, в [6] були знайдені точні порядкові оцінки величин $e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ж $\psi \in B \cap \Theta_{s'}^*$ і $\frac{1}{\psi(t)}$ опукла, то в роботі [5] встановлені точні порядкові оцінки величин $e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_s$, $1 < s < \infty$, для довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що при довільних $1 < p, s < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$ точні порядки величин $e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s$ також відомі (див., наприклад, [7] і [8]).

В даній роботі знайдено двосторонні оцінки для величин $e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty$, $1 \leq p < \infty$, у випадку, коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ належить до множини \mathfrak{M}_0 і крім цього

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty, & 1 < s < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, & s = 1. \end{cases}$$

В ній також знайдено двосторонні оцінки для величин $e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_s$ у випадку коли $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. При цьому константи в отриманих оцінках будуть виражені через параметри класів в явному вигляді.

Позначимо через $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ наближення сумами Фур'є класів $L_{\beta,p}^\psi$ в метриках просторів L_s , тобто величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s = \sup_{f \in L_{\beta,p}^\psi} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_s, \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \quad (8)$$

де $S_{n-1}(f; \cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n - 1$ функції f .

З означень величин (7) і (8) є очевидною нерівність

$$e_{2n-1}^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s, \quad 1 \leq p, s \leq \infty. \quad (9)$$

Отже, величини $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ природньо використовувати для оцінки зверху найкращих ортогональних тригонометричних наближень вигляду (7). Встановленню точних порядкових оцінок величин $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s$ при $1 \leq p < \infty$ і $s = \infty$ та $p = 1$ і $1 < s \leq \infty$ присвячено роботи [9]-[14].

Щоб сформулювати основні результати роботи введемо наступні позначення. Для кожного $1 < s < \infty$ покладемо

$$\xi(s) := \max \left\{ 4 \left(\frac{\pi}{s-1} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad 14(8\pi)^{\frac{1}{s}} s \right\}, \quad (10)$$

а для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$ і $\overline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, будемо позначати величини

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \quad (11)$$

$$\overline{\alpha}_n(\psi) := \sup_{t \geq n} \alpha(\psi; t), \quad (12)$$

де характеристика $\alpha(\psi; t)$ означається формулою (3). В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 < p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а функція $g_p(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{p}}$ така, що*

$$g_p \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > p'.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце співвідношення

$$K_{\psi,p}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq e_{2n}^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \leq e_{2n-1}^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (13)$$

в яких

$$K_{\psi,p}^{(1)} = \frac{1}{3\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \right), \quad (14)$$

$$K_{\psi,p}^{(2)} = \frac{1}{\pi} \xi(p') \left(\frac{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}{\underline{\alpha}_1(g_p)} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (15)$$

Доведення теореми 1. Згідно з теоремою 1 роботи [10] при виконанні умов $\psi(t)t^{\frac{1}{p}} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ справедлива оцінка

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (16)$$

в якій величини $K_{\psi,p}^{(2)}$ означені формулою (15).

Враховуючи нерівності (9) і (16), отримуємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty} \leq K_{\psi,p}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (17)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_{\infty}$. Розглянемо функцію

$$f_p^*(t) = f_p^*(\psi; n; t) := \frac{\lambda}{\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \cos kt, \quad (18)$$

де

$$\lambda = \lambda(\psi; p; n) := \frac{1}{\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad (19)$$

В [10] було показано, що при виконанні умови $g_p \in \mathfrak{M}_0$ функція f_p^* належить до $L_{\beta,p}^{\psi}$, $1 < p < \infty$. Покажемо, що

$$e_{2n}^{\perp}(f_p^*)_{\infty} \geq K_{\psi,p}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (20)$$

Нехай

$$\Phi_s(x) := \int_x^{\infty} \psi^s(t)t^{s-2}dt \quad (21)$$

і

$$A_s(l; n) = A_s(\psi; l; n) := \left[\Phi_s^{-1} \left(\frac{1}{2l} \Phi_s(n) \right) \right] + 2n, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α , Φ_s^{-1} — функція обернена до Φ_s .

Розглянемо величину

$$I_1 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_p^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_p^*; t)) V_{A_{p'}(l;n)}(t) dt \right|, \quad (23)$$

де $V_{A_{p'}(l;n)}$ — ядра Валле Пуссена V_m (див., наприклад, [1, с. 31])

$$V_m(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) \cos kt, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

при $m = A_{p'}(l;n)$.

В силу твердження Д.1.1 з [15, с. 391]

$$I_1 \leq \inf_{\gamma_{2n}} \|f_p^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_p^*; t)\|_{\infty} \|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1 = e_{2n}^{\perp}(f_p^*)_{\infty} \|V_{A_{p'}(l;n)}\|_1. \quad (25)$$

Оскільки (див., наприклад, [11, с. 247])

$$\|V_m\|_1 \leq 3\pi, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (26)$$

то з (25) і (26) можемо записати оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(f_p^*)_{\infty} \geq \frac{1}{3\pi} I_1. \quad (27)$$

Ядра V_m вигляду (24) можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} V_m(t) = & \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq m} e^{ikt} + \sum_{-m \leq k \leq -1} e^{ikt} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{m+1 \leq k \leq 2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m}\right) e^{ikt} + 2 \sum_{-2m+1 \leq k \leq -m-1} \left(1 - \frac{|k|}{2m}\right) e^{ikt} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Крім того

$$f_p^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_p^*; t) = \frac{\lambda}{2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} e^{ikt}. \quad (29)$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{imt} dt = \begin{cases} 0, & k + m \neq 0, \\ 2\pi, & k + m = 0, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad (30)$$

то з урахуванням (28) маємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\substack{|k| \geq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} e^{ikt} V_{A_{p'}(l;n)}(t) dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\substack{k \geq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} e^{ikt} + \sum_{\substack{k \leq -n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} e^{ikt} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq A_{p'}(l;n)} e^{ikt} + \sum_{-A_{p'}(l;n) \leq k \leq -1} e^{ikt} + \right. \\
& + 2 \sum_{A_{p'}(l;n)+1 \leq k \leq 2A_{p'}(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2A_{p'}(l;n)} \right) e^{ikt} + \\
& + 2 \sum_{-2A_{p'}(l;n)+1 \leq k \leq -A_{p'}(l;n)-1} \left(1 - \frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)} e^{ikt} \right) \Big) dt = \\
& = \pi \left(\sum_{\substack{n \leq k \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} + \sum_{\substack{-A_{p'}(l;n) \leq k \leq -n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} + \right. \\
& + 2 \sum_{\substack{A_{p'}(l;n)+1 \leq k \leq 2A_{p'}(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2A_{p'}(l;n)} \right) \psi^{p'}(k) k^{p'-2} + \\
& + 2 \sum_{\substack{-2A_{p'}(l;n)+1 \leq k \leq -A_{p'}(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2A_{p'}(l;n)} \right) \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} \Big) > \\
& > \pi \left(\sum_{\substack{n \leq k \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} + \sum_{\substack{-A_{p'}(l;n) \leq k \leq -n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(|k|) |k|^{p'-2} \right) = \\
& = \pi \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \tag{31}
\end{aligned}$$

В силу (23), (29) і (31)

$$I_1 > \frac{\pi \lambda}{2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p}}} \inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \tag{32}$$

Оскільки при $g_p \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^{p'}(t)t^{p'-2}$ монотонно спадає, то

$$\begin{aligned}
\inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} &= \sum_{\substack{2n \leq |k| \leq A_{p'}(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} = \\
&= 2 \sum_{k=2n}^{A_{p'}(l;n)} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}. \tag{33}
\end{aligned}$$

Покажемо, що за умови, коли функція $g_{s'}(t) = \psi(t)t^{\frac{1}{s'}}$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, така, що $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, то для довільних $l, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k) k^{s-2} > \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \tag{34}$$

Представимо $\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k)k^{s-2}$ у вигляді

$$\sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k)k^{s-2} = \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} - \sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k)k^{s-2} - \sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \quad (35)$$

З (22) та спадання функції $\Phi_s(\cdot)$ вигляду (21) впливає оцінка

$$\begin{aligned} \sum_{k=A_s(l;n)+1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} &\leq \int_{A_s(l;n)}^{\infty} \psi^s(t)t^{s-2}dt = \\ &= \Phi_s(A_s(l;n)) < \frac{1}{2l}\Phi_s(n) \leq \frac{1}{2l} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Знайдемо оцінку зверху для суми $\sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k)k^{s-2}$. Для цього скористаємось лемою 3 з [10].

Лема 1. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо функція $g_{s'} := \psi(t)t^{\frac{1}{s'}} \in \mathfrak{M}_0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, така, що $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$, то виконується нерівність

$$\psi^s(n)n^{s-1} \leq \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}, \quad (37)$$

якщо ж $g_{s'} \in \mathfrak{M}_C$, то має місце співвідношення

$$\frac{s}{\overline{\alpha}_n(g_{s'})} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{s + n\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2} \leq \psi^s(n)n^{s-1} \leq \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \quad (38)$$

Враховуючи, що при $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t)t^{s-2}$ спадає та використовуючи нерівність (37) леми 1, одержимо

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \psi^s(k)k^{s-2} \leq \psi^s(n)n^{s-1} \leq \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k)k^{s-2}. \quad (39)$$

Із (35), (36) і (39) одержимо нерівність (34).

Застосовуючи нерівність (34) при $s = p'$, в силу формул (27), (32) і (33), для довільних $l \in \mathbb{N}$ отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} e_{2n}^{\perp}(f^*)_{\infty} &\geq \frac{\lambda}{3} \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \frac{1}{3\xi(p)} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_n(g_p)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{p'}{\underline{\alpha}_n(g_p)}\right) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Перейшовши до границі в нерівності (40) при $l \rightarrow \infty$, отримуємо (20). Із (17) і (20) випливає (13). Теорему 1 доведено.

Неважко перекоонатись, що умовам теореми 1 задовольняють, наприклад, функції

$$\diamond \psi(t) = t^{-r}, \frac{1}{p} < r < 1; \quad (41)$$

$$\diamond \psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K), \gamma > \frac{1}{p'}, K \geq e^{\gamma p'} - 1; \quad (42)$$

$$\diamond \psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln \ln(t + K_2))^{-\delta}, \gamma \geq \frac{1}{p'}, \delta > \frac{1}{p'}, K_2 \geq K_1 e^{\max\{(\gamma+\delta)p', e\}} - 1. \quad (43)$$

Теорема 2. Нехай $1 < s < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ а функція $g_p(t) = \psi(t) t^{\frac{1}{p}}$ така, що

$$g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g_{s'}) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_{s'}; t) > s.$$

Тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце співвідношення

$$\frac{4}{3} K_{\psi, s'}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \leq K_{\psi, s'}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (44)$$

де $K_{\psi, s'}^{(1)}$ і $K_{\psi, s'}^{(2)}$ означаються формулами (14) і (15) відповідно.

Доведення теореми 2. Згідно з теоремою 1 роботи [11, с. 245] при виконанні умов $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} < \infty$, $1 < s < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, має місце оцінка

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \leq K_{\psi, s'}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (45)$$

Тому, враховуючи (9) і (45), отримуємо оцінку

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \leq K_{\psi, s'}^{(2)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (46)$$

Залишається показати, що

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta, 1}^{\psi})_s \geq \frac{4}{3} K_{\psi, s'}^{(1)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}. \quad (47)$$

При довільному $m \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_m(t) = f_m(\psi; \beta; t) :=$$

$$\begin{aligned}
&:= \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{k=1}^m \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) + 2 \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m} \right) \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{1 \leq k \leq m} \psi(k) e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{-m \leq k \leq -1} \psi(|k|) e^{ikt} + \right. \\
&\left. + 2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{m+1 \leq k \leq 2m-1} \left(1 - \frac{k}{2m} \right) \psi(k) e^{ikt} + 2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{-2m+1 \leq k \leq -m-1} \left(1 - \frac{|k|}{2m} \right) \psi(|k|) e^{ikt} \right). \quad (48)
\end{aligned}$$

В [11, с. 246–247] було встановлено, що $f_m \in L_{\beta,1}^\psi$ при будь-яких $m \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що при $m = A_s(l; n)$, де $A_s(l; n)$ означається рівністю (22), має місце нерівність

$$e_{2n}^\perp(f_{A_s(l;n)})_s \geq \frac{1}{4\xi(s')} \left(\frac{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}{s + \underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right) \left(\sum_{k=n}^\infty \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad l, n \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

Покладемо

$$I_2 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)}; t)) \sum_{k=n}^\infty \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) dt \right|. \quad (50)$$

Використавши твердження 3.8.1 роботи [1, с. 137], запишемо

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \inf_{\gamma_{2n}} \|f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)}; t)\|_s \left\| \sum_{k=n}^\infty \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'} = \\
&= e_{2n}^\perp(f_{A_s(l;n)})_s \left\| \sum_{k=n}^\infty \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'}, \quad 1 < s < \infty. \quad (51)
\end{aligned}$$

Згідно з формулою (25) роботи [11, с. 249]

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=n}^\infty \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_{s'} \leq \\
&\leq \xi(s') \left(1 + \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})} \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{k=n}^\infty \psi^s(k) k^{s-2} \right)^{\frac{1}{s'}}, \quad 1 < s < \infty. \quad (52)
\end{aligned}$$

В силу (48) має місце рівність

$$\begin{aligned}
&f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)}; t) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-A_s(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) e^{ikt} + \right. \\
&\left. + 2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{A_s(l;n)+1 \leq k \leq 2A_s(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2A_s(l;n)} \right) \psi(k) e^{ikt} + \right.
\end{aligned}$$

$$+2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1 \leq k \leq A_s(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2A_s(l;n)}\right) \psi(|k|) e^{ikt}. \quad (53)$$

Крім того,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{k \geq n} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{k \leq -n} \psi^{s-1}(|k|) |k|^{s-2} e^{ikt} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Використавши (30), (53) і (54), одержуємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (f_{A_s(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{A_s(l;n)}; t)) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{s-1}(k) k^{s-2} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \\ & = \frac{1}{8} \left(\sum_{\substack{n \leq k \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(k) k^{s-2} + \sum_{\substack{-A_s(l;n) \leq k \leq -n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(|k|) |k|^{s-2} + \right. \\ & \quad + 2 \sum_{\substack{A_s(l;n)+1 \leq k \leq 2A_s(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2A_s(l;n)}\right) \psi^s(k) k^{s-2} + \\ & \quad \left. + 2 \sum_{\substack{-2A_s(l;n)+1 \leq k \leq -A_s(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2A_s(l;n)}\right) \psi^s(|k|) |k|^{s-2} \right) > \\ & > \frac{1}{8} \left(\sum_{\substack{n \leq k \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(k) k^{s-2} + \sum_{\substack{-A_s(l;n) \leq k \leq -n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(|k|) |k|^{s-2} \right) = \\ & = \frac{1}{8} \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(k) k^{s-2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Отже, в силу (50) і (55)

$$I_2 > \frac{1}{8} \inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(k) k^{s-2}. \quad (56)$$

Враховуючи, що при $g_{s'} \in \mathfrak{M}_0$ функція $\psi^s(t) t^{s-2}$ спадає, то

$$\inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{n \leq |k| \leq A_s(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi^s(k) k^{s-2} = 2 \sum_{k=2n}^{A_s(l;n)} \psi^s(k) k^{s-2}. \quad (57)$$

З (34), (56) і (57) випливає нерівність

$$I_2 > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2l} - \frac{s}{\underline{\alpha}_n(g_{s'})}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi^s(k) k^{s-2}. \quad (58)$$

На підставі формул (51), (52) і (58) отримуємо (49).

З того, що $f_{A_s(l;n)} \in L_{\beta,1}^\psi$ випливає

$$e_{2n}^\perp(f_{A_s(l;n)})_s \geq e_{2n}^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_s, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Тоді при $l \in \infty$ з останньої нерівності і нерівності (49) отримуємо (47). Теорему 2 доведено.

Оскільки, згідно зі співвідношенням (38), у випадку, коли $g_p \in \mathfrak{M}_C$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \asymp \psi^{p'}(n) n^{p'-1},$$

то з теорем 1 і 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty$, і*

$$\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g_p; t) > p',$$

де $g_p(t) = \psi(t)(t)t^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді, якщо $g_p \in \mathfrak{M}_0$, то для довільного $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_{p'} \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (59)$$

якщо ж $g_p \in \mathfrak{M}_C$, то для довільного $\beta \in \mathbb{R}$

$$e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_{p'} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}}. \quad (60)$$

Зауважимо, що коли $g_p \in \mathfrak{M}_0$ і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(g_p; t) = \infty, \quad (61)$$

то порядкові рівності (60) місця не мають, оскільки в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n) n^{\frac{1}{p}} = o\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

яка є наслідком нерівності (37). Прикладом функцій ψ , які задовольняють умови наслідку 1 і для яких виконується умова (61), є функції виду (42) і (43).

Застосувавши наслідок 1 до функцій ψ виду (42) і (43), отримуємо наступне твердження.

Наслідок 2. *Нехай $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\gamma}(t + K)$, $\gamma > \frac{1}{p'}$, $K \geq e^{\gamma p'} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_{p'} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} \ln^{\frac{1}{p'}} n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Наслідок 3. *Нехай $\psi(t) = t^{-\frac{1}{p}} \ln^{-\frac{1}{p'}}(t + K_1)(\ln \ln(t + K_2))^{-\delta}$, $\delta > \frac{1}{p'}$, $K_2 \geq K_1 \geq e^{\max\{(\gamma+\delta)p', e\}} - 1$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$e_n^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_\infty \asymp e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_{p'} \asymp \psi(n) n^{\frac{1}{p}} (\ln n)^{\frac{1}{p'}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{p'}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

Теорема 3. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, а функція $g(t) = \psi(t)t$ така, що

$$g \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g; t) > 1.$$

Тоді, якщо $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{12\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (62)$$

Доведення теореми 3. В силу теореми 2 роботи [11, с. 255] за умови $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ справедлива нерівність

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (63)$$

Із (9) і (63) маємо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (64)$$

Знайдемо оцінку знизу величини $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}$.

Покладемо

$$\Psi(x) := \int_x^{\infty} \psi(t) dt,$$

$$D(l; n) = D(\psi; l; n) := \left[\Psi^{-1} \left(\frac{1}{2l} \Psi(n) \right) \right] + 2n, \quad l, n \in \mathbb{N}, \quad (65)$$

і

$$I_3 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)}; t)) V_{D(l;n)}(t) dt \right|, \quad (66)$$

де функція $f_{D(l;n)}(t)$ означається формулою (48) при $m = D(l; n)$.

Використовуючи твердження Д.1.1 з [15, с. 391] та формулу (26), можемо записати оцінку

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \inf_{\gamma_{2n}} \|f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)}; t)\|_{\infty} \|V_{D(l;n)}\|_1 = \\ &= e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty} \|V_{D(l;n)}\|_1 \leq 3\pi e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty}. \end{aligned} \quad (67)$$

Згідно з (48)

$$\begin{aligned} &f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)}; t) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) e^{ikt} + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) e^{ikt} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) \psi(k) e^{ikt} + \\
& +2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right) \psi(|k|) e^{ikt} \Big). \tag{68}
\end{aligned}$$

Із (28) при $m = D(l;n)$ маємо

$$\begin{aligned}
V_{D(l;n)}(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq D(l;n)} e^{ikt} + \sum_{-D(l;n) \leq k \leq -1} e^{ikt} + \right. \\
& +2 \sum_{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right) e^{ikt} + \\
& \left. +2 \sum_{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right) e^{ikt} \right). \tag{69}
\end{aligned}$$

Із (30), (68) і (69) випливає

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_{D(l;n)}(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_{D(l;n)}; t)) V_{D(l;n)}(t) dt \right| = \\
& = \frac{1}{8} \left| e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) + \right. \\
& +2e^{-i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) + \\
& \left. +2e^{i\frac{\beta\pi}{2}} \sum_{\substack{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(|k|) \right| = \\
& = \frac{1}{8} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) + \right. \\
& +2 \sum_{\substack{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) + \\
& +2 \sum_{\substack{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(|k|) \Big) + \\
& +i \sin \frac{\beta\pi}{2} \left(- \sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{\substack{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) + \\
& + 2 \sum_{\substack{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(|k|) \Big| \geq \\
& \geq \frac{1}{8} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) + \right. \\
& + 2 \sum_{\substack{D(l;n)+1 \leq k \leq 2D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{k}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(k) + \\
& + 2 \sum_{\substack{-2D(l;n)+1 \leq k \leq -D(l;n)-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \left(1 - \frac{|k|}{2D(l;n)}\right)^2 \psi(|k|) \Big) > \\
& > \frac{1}{8} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) \right). \tag{70}
\end{aligned}$$

На підставі (66) і (70) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}
I_3 & > \frac{1}{8} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \inf_{\gamma_{2n}} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) + \sum_{\substack{-D(l;n) \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(|k|) \right) = \\
& = \frac{1}{8} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \inf_{\gamma_{2n}} \sum_{\substack{1 \leq |k| \leq D(l;n), \\ k \notin \gamma_{2n}}} \psi(k) = \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \sum_{k=n+1}^{D(l;n)} \psi(k) = \\
& = \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) - \psi(n) - \sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) \right). \tag{71}
\end{aligned}$$

З (65) випливає, що для довільних $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=D(l;n)+1}^{\infty} \psi(k) \leq \int_{D(l;n)}^{\infty} \psi(t) dt = \Psi(D(l;n)) < \frac{1}{2l} \Psi(n) \leq \frac{1}{2l} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \tag{72}$$

Далі нам буде корисним наступне твердження роботи [11, с. 259].

Лема 2. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$. Тоді, якщо функція $g(t) = \psi(t)t$ така, що $g \in \mathfrak{M}_0$, то для довільних $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \tag{73}$$

Якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \cdot \frac{n\underline{\alpha}_n(g)}{1 + n\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leq \psi(n)n \leq \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (74)$$

В силу формул (71)–(73), маємо

$$I_3 > \frac{1}{4} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_n(g)n} - \frac{1}{2l} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (75)$$

З (67) та (75) за умови $\cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} &\geq e_{2n}^{\perp}(f_{D(l;n)})_{\infty} \geq \frac{1}{3\pi} I_3 > \\ &> \frac{1}{12\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n} - \frac{1}{2l} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \end{aligned} \quad (76)$$

Перейшовши в формулі (76) до границі при $l \rightarrow \infty$, одержимо

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \geq \frac{1}{12\pi} \left| \cos \frac{\beta\pi}{2} \right| \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)n} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k). \quad (77)$$

Об'єднуючи (64) і (77) отримуємо (62). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, а функція $g(t) = \psi(t)t$, така, що

$$g \in \mathfrak{M}_0$$

і

$$\underline{\alpha}_1(g) = \inf_{t \geq 1} \alpha(g; t) > 1. \quad (78)$$

Тоді, якщо $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, то для довільних $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності

$$\frac{1}{60\pi} \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)} \right) \psi(n)n \leq e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \psi(n)n. \quad (79)$$

Доведення теореми 4. В силу теореми 4 з [11, с. 262] при виконанні умов $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, $g \in \mathfrak{M}_0$, $\cos \frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, справедлива оцінка

$$e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty} \leq \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \psi(n)n. \quad (80)$$

Оцінимо знизу величину $e_{2n}^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_{\infty}$. Розглянемо функцію

$$f_n^*(t) = f_n^*(\psi; t) := \frac{1}{5\pi n} \left(\sum_{k=1}^n k\psi(k) \cos kt + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k)\psi(k) \cos kt \right). \quad (81)$$

В [11, с. 263–265] було показано, що f_n^* належить класу $L_{\beta,1}^\psi$. Доведемо, що

$$e_{2n}^\perp(f_n^*)_\infty \geq \frac{1}{60\pi} \left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right) \psi(n)n. \quad (82)$$

Покладемо

$$I_4 := \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*; t)) V_{2n}(t) dt \right|, \quad (83)$$

де V_m — суми Валле Пуссена вигляду (24).

Використавши твердження Д.1.1 з [15, с. 391] та нерівність (26), отримаємо

$$I_4 \leq \inf_{\gamma_{2n}} \|f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*; t)\|_\infty \|V_{2n}\|_1 \leq 3\pi e_{2n}^\perp(f_n^*)_\infty. \quad (84)$$

Оскільки, в силу формули (81) має місце рівність

$$\begin{aligned} f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*; t) &= \frac{1}{10\pi n} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} k\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-n \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} |k|\psi(|k|)e^{ikt} + \right. \\ &+ \sum_{\substack{n+1 \leq k \leq 2n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-k)\psi(k)e^{ikt} + \sum_{\substack{-2n \leq k \leq -n-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-k)\psi(|k|)e^{ikt} \Big) \end{aligned}$$

а в силу (28) — рівність

$$\begin{aligned} V_{2n}(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq 2n} e^{ikt} + \sum_{-2n \leq k \leq -1} e^{ikt} + 2 \sum_{2n+1 \leq k \leq 4n-1} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) e^{ikt} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{-4n+1 \leq k \leq -2n-1} \left(1 - \frac{|k|}{2n}\right) e^{ikt} \right), \end{aligned}$$

то застосовуючи формули (30), знаходимо

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} (f_n^*(t) - S_{\gamma_{2n}}(f_n^*; t)) V_{2n}(t) dt = \\ &= \frac{1}{10n} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} k\psi(k) + \sum_{\substack{-n \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} |k|\psi(|k|) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{n+1 \leq k \leq 2n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-k)\psi(k) + \sum_{\substack{-2n \leq k \leq -n-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-|k|)\psi(|k|) \right). \quad (85) \end{aligned}$$

Враховуючи формули (83) і (85), монотонне спадання функції g , та виконуючи елементарні перетворення, запишемо оцінку величини I_4

$$I_4 = \frac{1}{10n} \inf_{\gamma_{2n}} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} k\psi(k) + \sum_{\substack{-n \leq k \leq -1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} |k|\psi(|k|) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{n+1 \leq k \leq 2n, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-k)\psi(k) + \sum_{\substack{-2n \leq k \leq -n-1, \\ k \notin \gamma_{2n}}} (2n+1-|k|)\psi(|k|) \Big) > \\
& > \frac{1}{5n} \sum_{k=n+1}^{2n} \psi(k)(2n+1-k) \geq \frac{\psi(2n)}{5n} \sum_{k=n+1}^{2n} (2n+1-k) = \\
& = \psi(2n) \frac{n+1}{10} > \frac{1}{10} \psi(2n)n.
\end{aligned} \tag{86}$$

Використавши співвідношення (84) і (86), отримаємо

$$e_{2n}^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \geq e_{2n}^\perp(f_n^*)_\infty \geq \frac{1}{3\pi} I_4 \geq \frac{1}{30\pi} \psi(n)n \frac{\psi(2n)}{\psi(n)} = \frac{1}{60\pi} \psi(n)n \frac{g(2n)}{g(n)}. \tag{87}$$

Оскільки, як показано в [11, с. 266] за умови (78) виконується нерівність

$$\frac{g(2n)}{g(n)} > 1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)},$$

то з (87) випливає оцінка (82).

Із (80) і (82) випливає (79). Теорему 4 доведено.

Оскільки $g \in \mathfrak{M}_0$, де $g(t) = \psi(t)t$, то згідно з [1, с. 175] виконується нерівність $\frac{g(2n)}{g(n)} > K_1$. Тоді з (87) отримуємо оцінку

$$e_{2n}^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \geq K_2 \psi(n)n, \quad \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{88}$$

Крім того, очевидно, що при досить великих n справджується нерівність $\underline{\alpha}_1(g)n > K_3 > 1$. Тоді з (77) маємо

$$e_{2n}^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \geq K_4 \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \quad \cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{89}$$

Згідно зі співвідношенням (74) леми 2, якщо $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \asymp \psi(n)n. \tag{90}$$

Із (64), (80), (88)–(90) приходимо до наступного твердження.

Теорема 5. Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді, якщо функція $g(t) = \psi(t)t$, така, що

$$g \in \mathfrak{M}_0,$$

то

$$e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), & \cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases} \tag{91}$$

якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \psi(n)n. \quad (92)$$

Неважко переконатись, що умови теореми 5 задовольняють, наприклад, функції:

$$\diamond \psi(t) = t^{-r}, \quad r > 1; \quad (93)$$

$$\diamond \psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + K), \quad K > 0, \gamma > 1; \quad (94)$$

$$\diamond \psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + K_1)(\ln \ln(t + K_2))^{-\delta}, \quad \gamma \geq 1, \delta > 1, K_1 > 0, K_2 > e - 1. \quad (95)$$

Зауважимо, що коли $g \in \mathfrak{M}_0$, $g(t) = \psi(t)t$ і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(g; t) = \infty, \quad (96)$$

то в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n)n = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

яка є наслідком нерівності (73).

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови теореми 5 і для яких виконується умова (96), є функції виду (94) та (95).

Наведемо порядкові оцінки величин $e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty$ для функцій виду (93)–(95).

Наслідок 4. Нехай $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$e_n^\perp(W_{\beta,1}^r)_\infty \asymp n^{-r+1}.$$

Наслідок 5. Нехай $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-\gamma}(t + K)$, $\gamma > 1$, $K > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, і $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді

$$e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \begin{cases} \psi(n)n \ln n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

Наслідок 6. Нехай $\psi(t) = t^{-1} \ln^{-1}(t + K_1)(\ln \ln(t + K_2))^{-\delta}$, $\delta > 1$, $K_1 > 0$, $K_2 > e - 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, і $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Тоді

$$e_n^\perp(L_{\beta,1}^\psi)_\infty \asymp \begin{cases} \psi(n)n \ln n \ln(\ln n), & \cos \frac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos \frac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

Література

- [1] СТЕПАНЕЦ А.И. *Методы теории приближений*: В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України — Киев: Ін-т математики НАН України, 2002. — **40**. — Ч.І. — 427 с.
- [2] РОМАНЮК А.С. Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. — 2002. — **71**, №1. — С. 109–121.
- [3] РОМАНЮК А.С. *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных* // Праці Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 93. — 352 с.
- [4] РОМАНЮК А.С. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. — 2007. — **81**, №2. — С. 247–261.
- [5] ШКАПА В.В. Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. 2014. — **11**, №3. — С. 315–329.
- [6] ШКАПА В.В. Оцінки найкращих M -членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ у рівномірній метриці // Диференціальні рівняння та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. 2014. — **11**, №2. — С. 305–317.
- [7] ФЕДОРЕНКО А.С. Про найкращі m -членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L_{\beta,p}^{\psi}$ // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, №12. — С.1719–1721.
- [8] ФЕДОРЕНКО А.С. Наближення (ψ, β) -диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дисертації ... канд. фіз.-мат. наук. — К.: Ін-т математики НАН України, 2001. — 16 с.
- [9] ГРАБОВА У.З., СЕРДЮК А.С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β) – диференційовних функцій // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №9. — С.1186 – 1197.
- [10] SERDYUK A.S., STEPANIUK T.A. Order estimates of the best approximations and approximations of Fourier sums of classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness in uniform metric // Arxiv preprint, arXiv:1403.5311, 2014. — 20 p.
- [11] СТЕПАНЮК Т.А. Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України. 2014. — **11**, №3. — С. 241–269.

- [12] СТЕПАНЕЦ А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч.II. — 468 с.
- [13] РОМАНЮК В.С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Экстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2003. — Т. 46. — С. 131–135.
- [14] СЕРДЮК А.С., СТЕПАНЮК Т.А. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій// Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 255–282.
- [15] КОРНЕЙЧУК Н.П. *Точные константы в теории приближения*. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 424 с.
- [16] TEMLYAKOV V.N. *Approximation of Periodic Function*: Nova Science Publishers, Inc. — 1993. — 419p.

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net